الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- عين مجموعة الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (E): $8x-5y=3$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

- بين أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن : $m\equiv 9[40]$

ج- عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m\equiv 9[40]$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- بين أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب-ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 ؟

3. أ- حلل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998

ب- عين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2-34d^2=1998$

حيث $d=pgcd\,(a;b)$ و $m=ppcm(a;b)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع (نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

1 أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الحصول على الكريتين بيضاويين "

B " الحصول على كريتيين من نفس اللون "

2 نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتيين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله ألرياضياتي $E(X)$.

ب. عين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة.

3 نضيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

ما هو عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$

Nafouz

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. أحسب الحدود u_2 و u_3 و u_4 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n \leq n+3$.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $v_n = u_n - n$.

أ -بين المتتالية (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n.

4. نضع : $S_n = \frac{2}{3}v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S_n' = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S_n' ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II - f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ..(الوحدة $2cm$)

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = g(x)$ ثم أستنتج تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
3. أ. برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب. حدد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0
5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y\,[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات $(x\,,y)$ من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا وعائيين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

أ -بين أن $P(A)=\dfrac{3(n+2)}{4(n+3)}$

ب عين النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . تحقق أن $P(B)=\dfrac{3}{2(n+3)}$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n\ DA$.

ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n\ DA$

ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً

اشرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 .

4. فيما يلي نفرض أن $n>10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X=2n-20$

أ -عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X

ب أحسب أمله ألرياضياتي .

ج- بين أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ -أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ -أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$g(x)=x^2-1+\ln(x)$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .
2. أحسب $g(1)$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$.

II - دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
3. بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 يطلب كتابة معادلته .
4. أ- بين أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f)

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1).x+\ln(x)=0$.

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- تعيين مجموعة الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x-5y=3$

لدينا $8=5+3$ و منه $8(1)-5(1)=3....(F)$ بطرح (F) من (E) نجد أن $8(x-1)=5(y-1)$ و

$pgcd(8;5)=1$ حسب مبرهنة غوص فإن $\begin{cases}x-1=5k\\ y-1=8k\end{cases}:k\in Z$ أي $\begin{cases}x=1+5k\\ y=1+8k\end{cases}:k\in Z$ إذن مجموعة الحلول هي

$S=\{(1+5k\,;1+8k):k\in Z\}$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

- إثبات أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن: $m\equiv 9[40]$:

لدينا $8p+1=5q+4$ أي $8p-5q=3$ أي أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E).

$(p;q)=(1+5k;1+8k)$ و منه $m=8p+1=8+40k+1$ أي $m=40k+9$ إذن $m\equiv 9[40]$

ج- تعيين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m\equiv 9[40]$: $m\geq 2000$ أي أن $40k+9\geq 2000$ يعني

أن $k\geq \frac{1991}{40}$ إذن $k\geq 50$ بالتعويض بأصغر عدد لي هو 50 نجد أن $m=40\times 50+9=2009$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- إثبات أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $2^{3k}\equiv 1[7]$ لدينا $2^{3}\equiv 1[7]$ بالرفع الى قوى k نجد $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب- باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 : لدينا $1442=3\times 480+2$ و $2^{3\times 480}\equiv 1[7]$ بالضرب في 2^{2}

نجد $2^{3\times 480+2}\equiv 4[7]$ إذن باقي قسمة 2^{1442} على 7 هو 4 .

3. أ- تحليل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية : $1998=2\times 3^{3}\times 37$

استنتاج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998 : هي 1 و 3

ب- تعيين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^{2}-34d^{2}=1998$ حيث $d=pgcd(a;b)$ و

$m=ppcm(a;b)$ لدينا d قاسم للعدد m و منه d^{2} قاسم للعدد $m^{2}-34d^{2}$ أي انه قاسم للعدد 1998 إذن

$d^{2}=1$ أو $d^{2}=9$ إذن $d=1$ أو $d=3$

لما $d=1$: $m^{2}=34+1998$ أي $m^{2}=2032$ و 2032 ليس مربع تام إذن m غير موجودة لأنها عدد طبيعي .

لما $d=3$: $m^{2}=34\times 9+1998$ أي $m^{2}=2304$ ومنه $m=48$: $a.b=m.d$ أي أن $a.b=144$ نضع $a=3a'$ و

$b=3b'$ حيث $pgcd(a';b')=1$ و منه نجد $a'b'=16$ يعني أن $(a';b')=(1;16)$ أو $(a';b')=(16;1)$ إذن

$(a;b)=(3;48)$ أو $(a;b)=(48;3)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع

(نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

1 -حساب احتمال الحوادث التالية : $P(A)=\frac{7^{2}}{10^{2}}=\frac{49}{100}$ و $P(B)=\frac{7^{2}+3^{2}}{10^{2}}=\frac{58}{100}$

A " الحصول على الكريتيين بيضاويين "

B " الحصول على كريتيين من نفس اللون "

2 نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتيين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. تعين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	-2α	0	2α
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$

حساب أمله ألرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\frac{9}{100}(-2\alpha)+0+\frac{49}{100}(2\alpha)=\frac{80}{100}\alpha=\frac{4}{5}\alpha$

ب. تعين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة : يعني أن $E(X)>0$ يكافئ أن $\alpha>0$

3 تضيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

حساب عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$:

$P(A)=\frac{7^2}{(n+7)^2}=\frac{49}{(n+7)^2}$ و $P(A)=\frac{1}{4}$ بما n عدد طبيعي يعني أن $\frac{49}{(n+7)^2}=\frac{1}{4}$ يكافئ $(n+7)^2=4\times 49$ إذن

$(n+7)=2\times 7$ أي أن $n=7$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. حساب الحدود u_2 و u_3 و u_4 : $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=\frac{4+1+3}{3}=\frac{8}{3}$ و $u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=\frac{16+6+9}{9}=\frac{31}{9}$

و $u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{4}{3}+1=\frac{62+36+27}{27}=\frac{125}{27}$

تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n): المتتالية متزايدة لاحظنا أن $u_1\le u_2\le u_3\le u_4$

2. أ- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n\le n+3$:

$u_1\le 1+3$ محققة

نفرض أن $u_n\le n+3$ صحيحة و لنبرهن صحة $u_{n+1}\le n+4$

$u_n\le n+3$ يعني أن $\frac{2}{3}u_n\le\frac{2n+6}{3}$ بإضافة $\frac{1}{3}n+1$ نجد $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2n+6+n+3}{3}$ أي أن

$u_{n+1}\le n+3$ إذن $u_{n+1}\le n+4$ صحيحة لأن $n+3\le n+4$

و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\le n+3$.

ب- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ لدينا

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n+n+3}{3}$

. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) : بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\le n+3$ و

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $v_n=u_n-n$.

أ- إثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول : $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1$ أي

$v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$ و منه $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$ أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-n)$ إذن $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1=u_1-1=1$

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

استنتاج u_n بدلالة n: بما أن $u_n=v_n+n$ فإن $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n$

4. نضع : $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S_n'=u_1+u_2+...+u_n$.

حساب بدلالة n المجموعين S_n : مجموعة متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{9}$ و حدها الأول $\frac{2}{3}v_1$ إذن

$S_n=\frac{2}{3}v_1\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ و منه $S_n=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ إذن $S_n=\frac{6}{5}\cdot\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$

$S_n'=u_1+u_2+...+u_n$ تعني أن $S_n'=(v_1+1)+(v_2+2)+...+(v_n+n)$ مجموع متتاليتين حسابية (متتالية الإعداد الطبيعية)

و المتتالية (v_n) هندسية و منه $S_n'=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n(n+1)}{2}$ أي أن $S_n'=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{5n}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

1. دراسة تغيرات الدالة g : النهايات : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x^2e^{-x})=1$ و $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^2e^{-x})=-\infty$

المشتقة $g'(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x+2)e^{-x}$ أي $g'(x)=(x^2-4x+4)e^{-x}$ إذن

$g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$ موجبة و تنعدم عند 2

جدول تغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $0{,}35<\alpha<0{,}36$ لدينا ; $g(0{,}35)=-0{,}002$
$g(0{,}36)=0{,}016$ و بما الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة السابقة تقبل حل وحيد α

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ موجبة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و سالبة على المجال $]-\infty;\alpha]$

III – f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.. (الوحدة $2cm$)

1. حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x+x^2e^{-x}]=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x.[1+xe^{-x}]=+\infty$.

2. اثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=g(x)$: $f'(x)=1+2x.e^{-x}-(x^2+2)e^{-x}$ ومنه
$f'(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$ إذن $f'(x)=g(x)$

استنتلج تغيرات الدالة f : f متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$

جدول تغيرات:

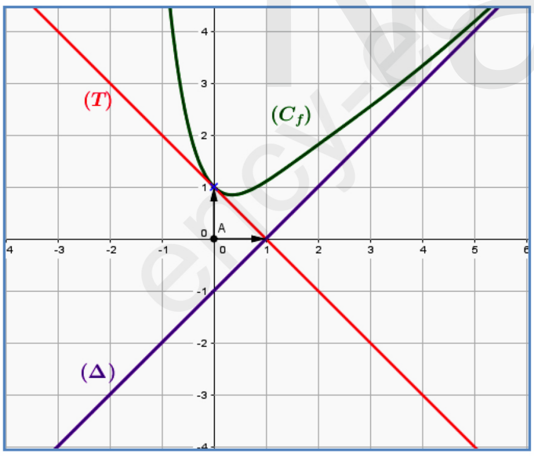
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3. أ. البرهان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}=0$ و منه محققة

ب. تحديد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ): $[f(x)-y]=(x^2+2)e^{-x}$ الفرق موجب تماماً و منه (C) يقع فوق المستقيم (Δ)

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=f'(0)x+f(0)$ أي $y=-x+1$

5. أنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C):



انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv 1[3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n}\equiv 1[3]$ و منه $2^{2n}-1\equiv 0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2-x\equiv$	0	0	2	0	0	2	$[6]$

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y[17]$.

$x^2\equiv y^2[17]$ يعني إن $x^2-y^2\equiv 0[17]$ يكافئ أن x^2-y^2 مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x\equiv y[17]$ أو $x\equiv -y[17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$: $12(4+10k)-5(9+24)=12\times 4+120k-5\times 9-120k$ و منه $12(4+10k)-5(9+24)=3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M\equiv 0[27]$ أي أن $100a+10b+c\equiv 0[27]$ أي أن $M-N\equiv -N[27]$ أي أن $M-N\equiv -100b-10c-a[27]$ أي $M-N\equiv -a-100b-10c[27]$ و $-999\equiv 0[27]$ أي أن و منه $M-N\equiv -1000a-100b-10c[27]$ أي $M-N\equiv -10(100a+10b+c)[27]$ أي أن $M-N\equiv -10M[27]$ و $M\equiv 0[27]$ إذن $M-N\equiv 0[27]$ صحيحة.

التمرين الثاني: (04 نقاط) :

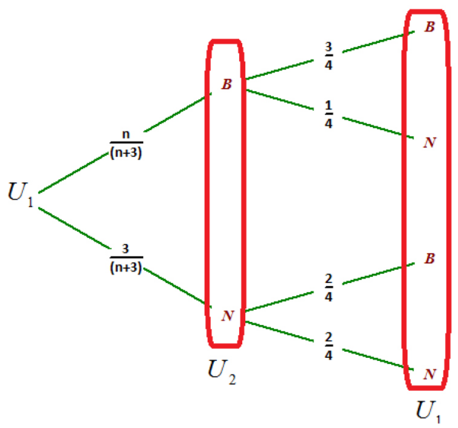
لدينا وعائيين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

أ -إثبات أن $P(A)=\dfrac{3(n+2)}{4(n+3)}$

الحادثة A هي أن نسحب كرة بيضاء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 أو نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها



في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة سوداء و نضعها في الوعاء U_1

من الشجرة $P(A)=\frac{n}{n+3}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$

ب-تعيين النهاية $\lim_{n\to+\infty}P(A)$: $\lim_{n\to+\infty}P(A)=\frac{3}{4}$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . التحقق أن $P(B)=\frac{3}{2(n+3)}$:

الحادثة B هي : أن نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 :

من الشجرة $P(B)=\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{2(n+3)}$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n\ DA$.

ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n\ DA$

ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً

شرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 :

اللاعب:

يأخذ $2n\ DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $2n-20$ يكون رابح إذا كانت $n>10$

أو يأخذ $n\,DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $n-20$ يكون رابح إذا كانت $n>20$

أو يأخذ إما $0\,DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو -20 هنا هو خاسر

إذن إذا كان n اصغر من 10 فإن اللاعب خاسر في الحالات الثالثة المذكور أعلاه

4. فيما يلي نفرض أن $n>10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X=2n-20$

أ -تعيين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{n}{4(n+3)}$

ب حساب أمله الرياضياتي : $E(X)=\frac{6(2n-20)+3(n-20)(n+2)-20n}{4(n+3)}=\frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}$

ج- إثبات أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 : اللعبة رابحة يعني أن $E(X)>0$

أي أن $3n^2-62n-240>0$ نحسب مميز كثير الحدود $3n^2-62n-240$ نجده $\Delta=6724=82^2$ إذن الجذران هما

$-\frac{10}{3}$ و 24 ومنه $E(X)>0$ لما $n\geq 25$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

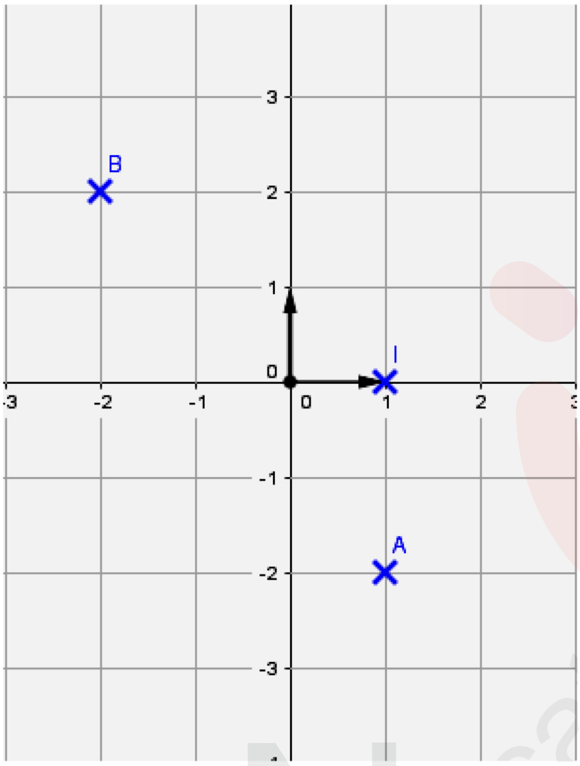
1. تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع $\alpha=x+iy$

نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتي

الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب

$z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.



أ-أنشاء النقط I و A و B

ب-تعيين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$

كتابة z_D على شكل الجبري :

$$z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{30+30i}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C):

$|z_D-z_w|=\left|\frac{4}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}$ و منه محققة

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث

$$z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$$

أ -كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ يعني

أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب استنتاج أن $z_E=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$: لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و منه

$$z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

ا - g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$g(x)=x^2-1+\ln(x)$.

1. دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$

المشتقة : $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة g ومتزايدة على $]0;+\infty[$

2. حساب : $g(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$: بما أن الدالة g ومتزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $g(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.

II – f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن.

2. إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

$f'(x)=1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ محققة

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3. إثبات أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 : $f'(x)=1$ تكافئ $\frac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن $\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$

معادلته $y=(x-e)+f(e)$ أي أن $y=x-1-\frac{1}{e}$ هي المعادلة المطلوبة

4. أ– إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f) :

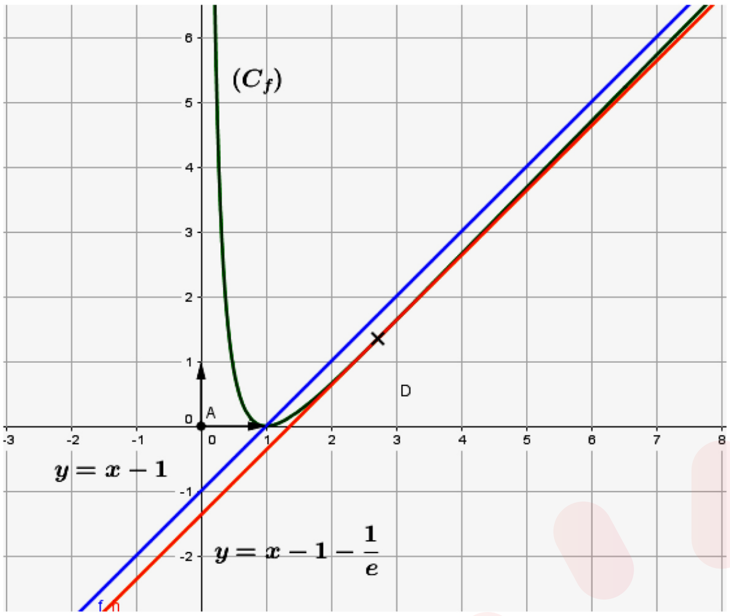
$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة

ب– درس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]=\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0;1[$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

5. إنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)



6. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1)x+\ln(x)=0$.

$(m+1)x+\ln(x)=0$ يكافئ

$(m+1)+\frac{\ln(x)}{x}=0$ و منه $m=-1-\frac{\ln(x)}{x}$

بإضافة x نجد $x+m=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$ و منه

$x+m=f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط

تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta_m):y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\frac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{e};-1\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in[-1;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد